**8- дәріс. Практикалық сабақтар**

Математиканы оқытуда есептердің шешуші рөл атқаратыны белгілі. Тек қана есеп шығару нәтижесінде оқушы ұғымдар, қасиеттер, теоремалар мен әдістерді пайдаланып, математиканы игереді. Жалпы математикалық білім беруде практикалық сабақтар едәуір орын алады.. Бұл дәрісте практикалық сабақ жүргізу әдістемесіне тоқталамыз. Әуелі математиканы оқытудағы есептің рөлін талқылайық.

*А. Есептер әдетте жаңа ұғымдар мен жаңа тақырып енгізгенде қолданылады.*

**Мысал.1.** Анықталған интеграл ұғымы - қисық-сызықты трапецияның ауданы, берілген тығыздықтағы кесіндідегі масса мөлшері, тоқ күші берілгендегі өткі3гіштің қимасы арқылы өтетін тоқ мөлшері туралы есептерге жол ашады.

**Мысал 2.**  Параметрге тәуелді интеграл ұғымын қарастыруды мына мысалдардан бастауға болады:



Интеграл астында шекке көшудің, интерал астында дифференциалдау мен интегралдау ресми амалын жасап, жаңа тәсілдің мағынасын көрсетуге екінші жағынан - жасалатын амалдардың негізделу проблемасына келтіре аламыз.

*Б. Есеп студенттің өз бетімен қайбір деректі ашуына қоданылады*.

**Мысал 3.** Кесіндіде шектелген кез-келген функция осы кесіндіде интегралдана бермейтінін өз бетінше анықтау үшін студенттерге Дирак функциясын беруге болады. Осы функция үшін [0;1]кесіндісінде бір рет рационал , екіншісінде - ирроционал  нүктелерінің Риман қосындысын құрып , студенттің табатыны



Осыдан ол  кезінде интегралдың шегі болмайтынын-Дирак функциясы [0;1]де интегралданбайтынын қорытып шығарады.

**Мысал 4.** Студентке «Тізбектің шегінің бар болуы кейде осы шекті табуға ыпал жасайды» дерегін тағайындату үшін, оған реккурентті берілген  тізбегін ұсынамыз. Реккурентті теңдікте шекке көшіп студент екенін табады. Одан шығатыны .

*В. Есеп зерттелінетін деректі кескіндеу үшін қолданылады.*

**Мысал 5.** «Мүшелері үзіліссіз қатардың жинақтылығы осы қатардың қосындысының үзіліссіздігінің жеткілікті шарты болмайды» дерегін кескіндеу үшін студенттерге мүшелері [0;1]де үзіліссіз мысалды ұсынамыз:



Бірақ оның қосындысы  нүктесінде үзіліс иеленеді:



**Мысал 6. «**Риман бойынша интегралданатын функциялар класы үзіліссіз функциялар класынан кең» дерегін кескіндеу үшін студенттерге кемімейтін  , демек [0;4] де 4 үзіліс нүктесін иеленетін функциясын беруге болады**.**

*Г. Есеп теориялық деректі анағұрлым терең түсіну үшін беріледі.*

**Мысал 7.**  функциясының дифференциалданатындығы мен оның дербес туындыларының бар болатындығына өз-ара байланысын ұғу үшін студенттерге келесі екі функция ұсынылады:

 

Егер бірінші функция нүктеде дербес туындының табылуы тек қана оның осы нүктеде дифференциалданатындығын көрсетсе, онда екіншісі нүктеде екеуінің де дербес туындысының үзіліссіздігі (олардың нүкте аймағында бар болу шартында) осы нүктеде дифференциалдануының тек қана жеткілікті шарты болады.

*Д. Есептер дағдылануды қалыптастыру үшінкеңірек қолданылады.*

 *Е. Білім деңгейін, шеберлікті бақылау және өзін тексеру үшін шығарылатын есептердің алатын рөлі өте ерекше.* «Математикадағы шеберлік» дегеніміз есепті шығару, дәлел табу, қабылеті, математикалық аппаратты мейлінше жеңіл қолданып қорытындыны сындарлы талдау, нақты ахуалдарда математикалық ұғымдарды тану. Егер студент туындының анықтамасын жаттап алғанымен, оны нақты ахуалдарда қолдана алмаса, онда бұл білім емес. Сондықтан, оның бақылауда дифференциалдану мен туынды ұғымы құндырақ болады. Мысалы, «нүктесінде  функциясы дифференциалдана ма? Сіздің тұжырымыңызды дәлелдеңіз». «  функциясының  нүктесінде дифференциалданатындығына негізді жауап беріңіз».

Егер практикалық дағдыны бақылау туралы айтар болсақ, онда бұл жерде есепсіз ештепңе жасай алмаймыз. Есептің көмегімен білім дегейін бақылау қалыс қалған сәттерді мейлінше нақты анықтап, қиындықтарды жеңуге бағытталған жұмысты мақсатты жүргізіп, оқу материалын меңгеруге ықпал етеді.

*Ж. Студенттердің математикаға қызығушшылығын ояту және қолдау ісінде есептің атқаратын рөлі зор.* Қолданбалы, әсіресе студенттің көздеген мамандығына байланысты есептер м атематикалық әдістердің маңызын көрсетіп, сола рқылы студенттердің қызығушылығын оятады*.* Оның сыртында,таза математикалық есептер өзінің жауабымен немесе шығару тәсілімен, оқыс тәсілдерімен және ойланарлық кезеңдерімен қызықты, сонымен қатар математикамен шұғылдануға жөн сілтейді . Бірнеше есеп ткелтірейік.

 Су сағатының бүйір беті айналу бетін білдіреді. Су деңгейі бірқалыпты төмендейтін бет формасын табу керек.

 Үш шырпы талы арқылы дұрыс үшбұрыш құрамыз. 6 шырпы талымен 4 дұрыс үшбұрыш құра аламыз ба?

Өзен жағасында бірдей тереңдіктегі ашық жүзу бассейіні салынып жатыр. Бассейн

өзеннен бөлінбеген. Бассейннің ауданы берілген қабырғаларын әрлегенде бетон аз кетуі үшін бассайн формасы қандай болуы керек?

*З.Математикалық есептерді шығару студентерді математикалық сипаттағы қызметке жұмылдырады, оларды талқылаулары мен қорытындыларының дәйекті болуына үйретеді.*

**Математиканың оқулық есептерінің талаптары**

*Бірінші талап.* Есеп сабақтың мақсатына жетуге максимум дәрежеде ықпал етуі қажет. Осыған орай келесі мәселелер қарастырылады. Есеп қажетті жағдайды қаншалықты дәрежеде бейнелей алады? Есепті ығару барысында сабақтың мақсатынан ауытқып кетпейміз бе? Есеп өте шұбалааңқы емес пе? Қойылған мақсатқа байланысты есепті шығарудағы әрекетіміздің үлесі қандай? Ол өте аз емеспе?

 Қатардың жинақтылығының барлық жағдайын кескіндеу керек. Мақсат осында..

Мысал.  ақырлы дербес қосындылардың табылатындығын бейнелейді;  дербес қосындылар тізбегінің ақырсыз шегін көрсетеді; 

мысалдары дербес қосындылар тізбегінің шекке ие болмайтындығын кескіндейді. Соңғысында студент



 формулаларын біледі деп саналады. Кер» жағдайда бұл формулаларды қоытып шығару көп уақыт алады да, есептің мақсатты бөлігін кейіенге қалдырып, мысалдың қажеті төмендепболып қалады. Студенттер комплекс жазықтыққа көшу арқылы дербес туындылар өрнегі алудан хабарсыз болғандықтан,  мысалдарының қолданысқа жарамдылығы шамалы болады.

**Мысал 8.**



беттерімен шектелген дүниенің көлемін табу керек.

Мақсат: студенттерді

 

формуласын пйдалануға үйрету.

Есепті шығару туралы бірер сөз. а)үшін: беті цитлиндрді жоғарыдан, ал  жазықтығы төменнен шектейді, г) формуласынан алатынымыз

 

облысын табу ғана қалды. Бұл зат бүйірінен  цилиндрлік бетпен- дөңгелек цилиндрмен шектелген. Ол жазықтығында  дөңгелегін – интегралдау облысын қияды. б) үшін зат бүйірінен  цилиндрлік бетімен шектелген және жазықтығының бөлігі жазықтығындағы жарты жазықтықты қияды. Алдыңғыдан айырмашылық беттерінің ешқайсысы бірінің үстінде орналаспайды. Облысты бір жазықтық екіншісінің үстінде жататын  және бөліктеріне бөлуге тура келеді. Олардың әрқайсысы үшін г) формуласын қолдана аламыз:





Бұл мысалдар несімен сәтті, олар неге үйретеді? Дене бүйірінен жасаушысы  өсіне параллель цилиндрлік бетпен шектелсе, бұл бет  жазықтығынан г) формуласымен интегралданатын облысты қияды. Мұнымен қатар, затты жоғарыдан және төменнен шектейтін бет оңай табылады да, бұл заттың суретін салудың қажеті болмайды. Енді в) ға көшейік. Мұнда затты бүйірінен шектейтін цилиндрлік бет жоқ. Интегралдау облысы денені  жазықтығына проекциялау арқылы табылады. Мұны жасауға төмендегі сурет көмектеседі. Ол дене жоғарыдан жарты сферамен , төменнен айналу параболоидымен шектесетінін көрсетеді. Сонда г) формуласы мынаны береді





Денені  жазықтығына проекциялауды сфера мен параболоидтың қиылысу сызығы арқылы өтетін цилиндрлік бет көмегімен жүргіземіз -  теңдеуінен z айнымалысын жоямыз. Бұл мысал жасаушысы денені шектейтін беттердің қиылысуынан анықталатын,  өсіне параллель, цилиндрлік бет алу жолымен интегралдау облысын табуға үйретеді. Мұнда сурет міндетті. Оны салу қиын емес. Ол көп дүниені көруге мүмкіндік береді.

*Екінші талап.*  Есепті студенттерді қызықтыратындай түрде қалыптастыру қажет. Мына сұрақтарға жауап берген пайдалы: Неге мұндай үйірі есептер алынды? Математикалық есепті сақтай отырып, үйірді өзгертуге бола ма? Есеп үйірі студенттерді шығару нәтижесіне де, шығару жолына да қызықтыратын осы теорияның қолдану облысын көрсетеді. Әсіресе студенттер таңдаған мамандыққа сай есептер өте қызығарлық болады.

*Үшінші талап.* Есептің сандық мәліметтері нақты болуы қажет. Қолданбалы сипаттағы мысал берілгенде оның шартындағы берілген сандық мәліметтер нақты жағдайға қайшылық тудырмайтынына мұқият болу керек. Талап бұзылатын мысалдарға тоқталайық: «қырман алаңы ауылдық жолдан төрт шақырым орналассын. Бұл қырманға ең жақын жолдан қоймаға дейінгі қашықтық 9 шақырым. Алаңда автомашина 30 ш/сағ жылдамдықпен, ал жолда 60 ш/сағ жылдамдықпен жүреді. Дәнді қоймаға қысқа уақытта жеткізу үшін автомашина жолдың қай нүктесінде түзу-сызықты жүруі қажет?» Бұл мысалдағы жылдамдықтар нақты жағдайға сай келмейді. «99% ылғалдылықтағы 30 кг саңырауқұлақ жиналды. Кепкен соң ылғалдылық 98% болды. Кепкен сағырауқұлақтардың массасы қандай? » Ылғалдылығы 98% кепкен саңырауқұлақ деген не?

*Төртінші талап.* Есеп күшке тимейтіндей болуы қажет. Мына сұрақтарға жауап берген пайдалы: оқушылар өздігінен бұл есепті шығара ала ма? Ол үшін нені білуі керек? Егер оқушы есепті шығара алмаса, бұл ненің белгісі?

 Мысалы, студент элементар функциялардың туындысын табуды үйренсін. Ол үшін негізгі элементар функциялардың туындысының кестесін біліп, функцияның сызықты комбинациясының , көбейтіндісінің, бөлінуінің, композициясының туындысын табу ережелерін білуі қажет. Оқытушы сабаққа есепті іріктегенде оларды біртіндеп дифференциалдау формулалары мен ережелерін үйренетіндей ретте орналастыруы керек. Білімді бақылау есептерін таңдағанда ол студенттің әр формула мен әр ережені білуін бір мысалға бірнеше элемент енгізуі керек.

**Мысал 10.** функциясының графигін құрғанда студент функция шексіз көп туынды иеленетін  нүктесінің аймағында қисықты салуда қиындыққа ұшырайды. Ол соңыны ескермей нөлдік туындыдағыдай минимум нүктесінің аймағындағы қисықты салады. Бірақ, мұндай график зерттеу нәтижелерімен сай келмейді:  пен арасында артық иілу нүктесі пайда болады да,  ден оңға таманғы иілу нүктесі жоғалады.

****

Ахуалды зерттеу функция графигін салғанда жанаманы қолдану ережесі туындайтынына соқтырады:  кезінде вертикаль жанама жүргіземіз де минимумның бар болатынын ескереміз, демек , қисық б) жағдайындағыдай салынуы қажет. Бұл мысалды шығарғанда оқытушы студенттің минимум аймағы мен ондағы ақырсыз туынды маңында график салудан қиналатынын алдын ала біліп, осы нүктеде жанама жүргізуге кеңес беруді ойлайды.

*Бесінші талап.* Студент есеп шығару жоспарын құруда оқытушының көмектесуіне болатындай есептер. Бұл жағдайда студент кейбір тәсілдерді бірінші рет кезіктіреді де, ол тәсілді оқытушының көмегінсіз еске түсіре алмайды. Оқытушы шешіміне көмек беретін есептер сериясын алдын ала дайындап қояды.

**Мысал 11.**  қатарын тікелей қосындылауда студент дербес қосындыны алуға қиналып қалады. Болжам жасаған пайдалы. Бөлшектердің бөлімі бір-бір көбейткіштен тұрса қосындылау ықшамдалады деуге болады. Бөлімінде екі көбейткіш тұрған бөлшекті бөлімінде осы көбейткіштер тұратын екі бөлшектің қосындысы түрінде өрнектеуге бола ма? Бұрын мұндай амалдар жасамап па едік? Студент ойға түсіріп, жіктеуді жазып, оның кэффициенттерін таба алады: . Сонда .

**Мысал 12.** Вейерштрасс белгісін пайдаланып,  қатарының [0;+ ] де біркелкі жинақталатыны дәлелде. Жол сілтеуші сұрақ: «функцияның жоғарыдан(төменнен) бағалануын не білдіреді?» Оның жауабы: «Супремум (инфимум)» немесе «функцияның ең үлкен (ең кіші мәні)» Ендеше студент функцияның ең үлкен және ең кіші мәндері туралы есепке тіреледі. Бұл жағдайда қатардың мүшелері



*n-*ші мүшенің ең кіші және ең үлкен мәндері мына сандардың арасында жатыр:



Демек,



қатар мүшелерінің бағасы алынды.

*Алтыншы талап.* Есеп алдыңғы және кейінгі оқу материалдарымен байланысқан. Математика курсында ең көп орынды берілген дәріс пен практикалық сабақ шеңберіндегі жаттығу сипатындағы немесе көрнекілік дәрежедегі есептер алады. Есептің алдыңғы материалмен немесе келесі сабақта немесе дәрісте пайдаланылатын кездері де сирек емес. Мұндай есептерді тығызырақ байланыстыру пайдалы және оқыту уақытты үнемдейді.

**Мысал 13.** Практикалық сабақтардың қатары мына тәртіпте жүргізіледі: сандық қатарлардың жинақтылығының есебі шығарылады, одан соң – функционалдық қатардың жинақтылық облысы қарастырылады, әрі қарай –біркелкі жинақтылық, ақырында функционалдық қасиеттер, әрі алдыңғы сабақ нәтижелері қолданылмайды. Функционалдық қасиеттер есебін шығару уақытты көп алады, өйткені әр кезде қатардың жинақтылығын, біркелкі жинақтылығын дәлелдеу керек. Бұл есептің мақсаты болмасада, қатардың функционалдық қасиеттері туралы теоремаларды көлегейлеп қалады. Біздіңше келесі практика неғұрлым жөнді сияқты:

1. Әуелі қатардың қасиеттеріне есептер іріктеледі. Олардың саны әдеттегіден 2-3 есе

көп болады.

1. Одан соң біркелкі жинақтылық есебі таңдалады. Бұған міндетті түрде

функционалдық қасиеттің келесі сабақтағы барлық қатарлары енеді. Әрі қатардың жинақтылық облысын табу есептері қамтылмайды, ол алдыңғы сабақтарда қарастырылады.

1. Осыдан соң ғана жинақтылық белгілерін қолдану есептері таңдалады. Әрі

функционалдық қатарлар тақырыптың басында енгізіліп, есептердің көпшілігі қатардың жинақталу облысын ретінде рәсімделеді – бұл нақтысында сандық қатарлардың жинақтылығына соқтырады. Бұл мысалдардың жинағына келесі сабақта қарастырылатын біркелкі жинақтылықтың барлығы енгізіледі.

 Мұнымен неге жетеміз? Баптағы сабақтарда студенттердің бар назары функционалдық қатарларға ауады, өйткені біркелкі жинақтылық және қажетті қатарлардың біркелкі жинақтылығы дәлелденіп қайған. Есептер едәуір жылдамырақ шығарылады. Тек қорытындыда ғана толық зерттеуді қамтитын мысал берілуі мүмкін. Босаған уақыттар біркелкі жинақтылық есептеріне беріледі. Сонымен бұл сабақта жинақтылық облыстары табылып қойған, студенттердің бар ықыласы біркелкі жинақтылық белгілеріне – есептің мақсатына ауады